

Appunti di Dinamica dei Sistemi Materiali

Cinematica Rotazionale

Scopo di questa parte è quello di presentare le leggi del moto circolare uniformemente accelerato e di approfondire la conoscenza del moto circolare del punto. Questo è fondamentale per lo studio del moto delle particelle che compongono un sistema in rotazione.

Immaginiamo infatti un corpo rigido che ruoti attorno ad un asse fisso dello spazio. Tutte le immaginarie rette radiali solidali con il corpo e perpendicolari all'asse di rotazione ruotano dello stesso angolo nello stesso tempo, quindi la velocità angolare

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

è la stessa per tutte le particelle che compongono il corpo.

Se la velocità angolare di rotazione non è costante nel tempo, il corpo è soggetto ad una accelerazione angolare. Questa accelerazione è definita come:

$$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

Il moto rotatorio accelerato più semplice è quello con accelerazione angolare costante. Le equazioni che lo descrivono sono analoghe alle equazioni che descrivono il moto traslatorio uniformemente accelerato:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

L'accelerazione angolare in un moto circolare è strettamente legata alla variazione della velocità tangenziale $v = \omega r$:

Il moto delle particelle di un corpo in rotazione può essere descritto usando sia variabili lineari (traslatorie) che angolari (ma in generale sono più utili quest'ultime). Le relazioni tra i due tipi di variabili sono le seguenti:

- per lo spostamento: $s = \theta r$
- per la velocità: $v = \omega r$
- per l'accelerazione tangenziale: $a_T = \alpha r$
- per l'accelerazione centripeta: $a_C = \omega^2 r$

Dinamica dei Sistemi di Particelle

Per lo studio dei sistemi di particelle è fondamentale introdurre il concetto di *centro di massa*. Tale ipotetico punto, non necessariamente appartenente al sistema, è importante perché le leggi che descrivono il suo moto assumono un aspetto particolarmente semplice, e perché in determinate circostanze può essere pensato come rappresentativo dell'intero sistema.

La posizione del centro di massa è definita come:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_1^N m_i \vec{r}_i}{\sum_1^N m_i} = \frac{\sum_1^N m_i \vec{r}_i}{M}$$

cioè tale posizione è la media pesata delle posizioni spaziali delle singole masse, i cui pesi sono proprio le masse.

La velocità del centro di massa si definisce come qualsiasi altra velocità di un punto e quindi può essere calcolata come:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\Delta \vec{r}_{CM}}{\Delta t} = \frac{\sum_1^N m_i \frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t}}{\sum_1^N m_i} = \frac{\sum_1^N m_i \vec{v}_i}{M}$$

risultando così la media pesata delle velocità delle singole particelle. Allora

$$M \vec{v}_{CM} = \sum_1^N m_i \vec{v}_i$$

- *la quantità di moto di un sistema di particelle è quella che avrebbe il centro di massa considerato come punto materiale in cui è concentrata tutta la massa del sistema*

Le stesse considerazioni valgono per l'accelerazione del centro di massa:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\Delta \vec{v}_{CM}}{\Delta t} = \frac{\sum_1^N m_i \frac{\Delta \vec{v}_i}{\Delta t}}{M} = \frac{\sum_1^N m_i \vec{a}_i}{M} = \frac{\sum_1^N \vec{F}_i}{M}$$

La forza totale agente sulla singola particella può essere suddivisa in una forza esterna, dovuta cioè ad agenti esterni al sistema, ed in una forza interna, dovuta all'interazione con le altre particelle:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,int} + \vec{F}_{i,est}$$

ma per il principio di azione e reazione le forze interne si annullano a due a due e quindi:

$$\sum_1^N \vec{F}_{i,int} = \vec{0} \qquad \sum_1^N \vec{F}_i = \sum_1^N (\vec{F}_{i,int} + \vec{F}_{i,est}) = \sum_1^N \vec{F}_{i,est} = \vec{F}_{est}$$

questo comporta allora che

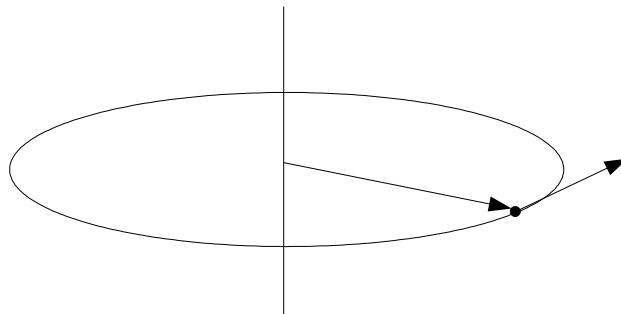
$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum_1^N \vec{F}_{i,est}}{M} = \frac{\vec{F}_{est}}{M}$$

o anche

$$\vec{F}_{est} = M \vec{a}_{CM}$$

- in generale, per un sistema non isolato, il centro di massa si muove quindi come un punto materiale in cui è concentrata tutta la massa del sistema e sul quale agisce la risultante delle forze esterne
- il centro di massa di un sistema isolato di particelle o è in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme

Momento angolare (singola particella)



Immaginiamo una massa puntiforme in moto circolare. Si definisce momento angolare della massa il prodotto vettore tra la posizione e la quantità di moto:

$$\vec{l} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

La variazione nel tempo di tale grandezza è legata alle forze, meglio al momento delle forze, agenti sulla massa:

$$\frac{\Delta \vec{l}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{v} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{\tau}$$

$$\vec{\tau} = \frac{\Delta \vec{l}}{\Delta t}$$

Nel caso di un moto puramente circolare il momento angolare scalare è:

$$l = rp = rmv = rm\omega r = mr^2\omega = I\omega$$

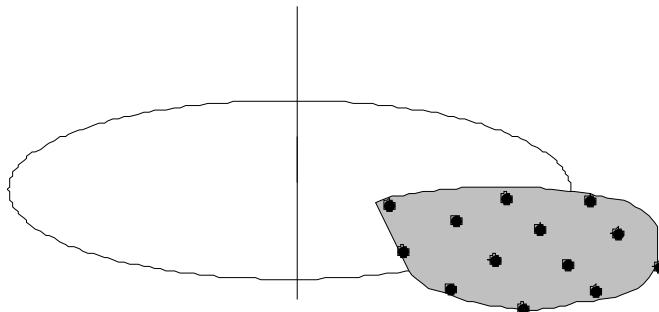
ove $I = mr^2$ indica il momento d'inerzia della massa m rispetto al centro di rotazione. Allora il momento della forza è anche:

$$\tau = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta(I\omega)}{\Delta t} = \frac{I \Delta \omega}{\Delta t} = I\alpha$$

ove α indica l'accelerazione angolare del sistema.

Se l'unica forza agente è la forza centripeta, cioè non è presente alcuna forza tangenziale, allora il momento angolare non cambia, dato che il momento della forza centripeta è necessariamente nullo.

Momento angolare (sistema di particelle)



Il momento angolare totale di un sistema di particelle rispetto ad un punto fisso è la somma vettoriale dei momenti angolari delle singole particelle:

$$\vec{L} = \sum_1^N \vec{l}_i = \sum_1^N \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i$$

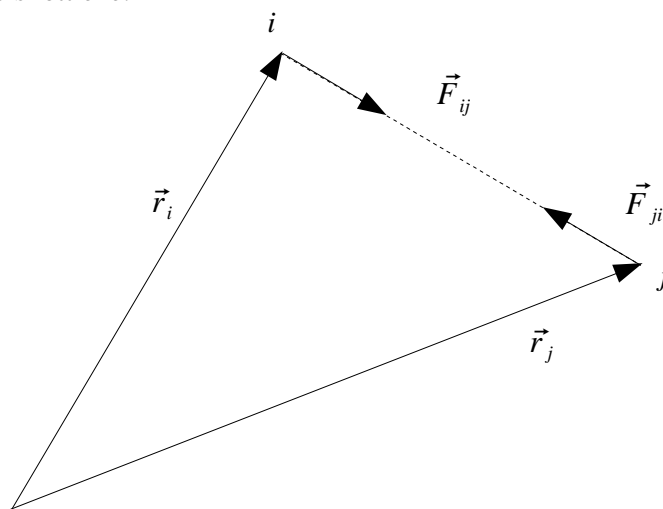
La sua variazione nel tempo si può calcolare come:

$$\frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \sum_1^N \left(\frac{\Delta \vec{r}_i}{\Delta t} \wedge \vec{p}_i + \vec{r}_i \wedge \frac{\Delta \vec{p}_i}{\Delta t} \right) = \sum_1^N (\vec{r}_i \wedge \vec{F}_{i,int} + \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{i,est}) = \sum_1^N \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{i,est} = \sum_1^N \vec{\tau}_{i,est}$$

Il termine relativo alle forze interne

$$\sum_1^N \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{i,int}$$

è nullo sempre a causa del principio di azione e reazione. Infatti, considerando due generiche particelle i e j in interazione tra loro si ottiene:



$$\vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ji} = \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ij} - \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \wedge \vec{F}_{ij} = \vec{0}$$

Ponendo

$$\vec{\tau}_{est} = \sum_1^N \vec{\tau}_{i,est}$$

si ottiene che la rapidità di variazione nel tempo del momento angolare è uguale alla somma dei momenti meccanici esterni agenti sul sistema:

$$\vec{\tau}_{est} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$

Questa relazione esprime la **legge fondamentale della dinamica delle rotazioni** ed ha come immediata conseguenza il:

principio di conservazione del momento angolare: *quando il momento risultante delle forze esterne applicate al sistema è nullo, il vettore momento angolare totale del sistema rimane costante nel tempo.*

Corpo rigido

Un corpo rigido si può definire come un sistema di particelle che mantengono nel tempo sempre la medesima distanza reciproca. Il moto di un corpo rigido è di pura rotazione, rispetto ad un dato riferimento, se tutte le particelle del corpo si muovono su dei cerchi i cui centri giacciono su una retta, detta asse di rotazione. Il moto generale di un corpo rigido è quindi una combinazione di moto traslatorio e di moto rotatorio.

Il moto traslatorio può essere descritto immaginando che tutta la massa sia concentrata nel centro di massa e che su questo agisca la risultante di tutte le forze esterne agenti sul corpo. L'accelerazione del centro di massa è allora data da:

$$\vec{F}_{est} = M \vec{a}_{CM}$$

E' una grandissima semplificazione poter rappresentare il moto traslatorio di un corpo rigido con il moto di un singolo punto, il suo centro di massa.

Si dimostra inoltre che per un corpo rigido rotante attorno ad un asse valgono le stesse relazioni già viste per la particella singola:

$$L = I \omega$$

e

$$\tau_{est} = I \alpha$$

dove I è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse così definito:

$$I = \sum_1^N m_i r_i^2$$

Il calcolo del momento d'inerzia per un corpo rigido è complesso, ma generalmente basta fare riferimento ad alcuni casi tipici relativi ad oggetti di forma geometrica standard.

cilindro pieno di massa M e raggio R
(rispetto all'asse di simmetria)

$$\frac{1}{2} M R^2$$

cilindro cavo di massa M e raggio R
(rispetto all'asse di simmetria)

$$M R^2$$

sfera piena di massa M e raggio R
(rispetto ad un asse diametrale)

$$\frac{2}{5} M R^2$$

asta rigida di massa M e lunghezza L $\frac{1}{12} M L^2$
 (rispetto all'asse normale passante per il centro di massa)

asta rigida di massa M e lunghezza L $\frac{1}{3} M L^2$
 (rispetto all'asse normale passante per un'estremità)

L'energia cinetica di un corpo rigido rotante rispetto ad un prefissato asse con velocità angolare è esprimibile in modo semplice in termini del momento d'inerzia, a causa del fatto che tutte le particelle del corpo posseggono la stessa velocità angolare. Infatti:

$$E_{cin} = \sum_1^N E_{cin,i} = \sum_1^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_1^N \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_1^N m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

L'energia cinetica totale di un corpo in rototraslazione sarà allora somma di un'energia cinetica traslazionale e di un'energia cinetica rotazionale, generalmente riferite rispettivamente allo spostamento del centro di massa e ad una rotazione attorno ad un asse passante per lo stesso:

$$E_{cin,tot} = E_{tra} + E_{rot} = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

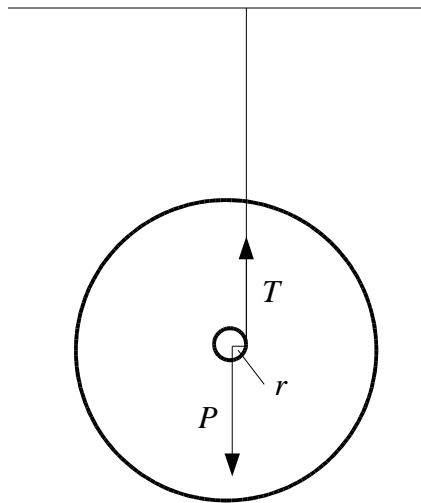
Corrispondenze tra moto traslatorio e moto rotatorio

<i>moto traslatorio</i>		<i>moto rotatorio</i>	
massa	m	momento d'inerzia	I
velocità	v	velocità angolare	ω
accelerazione	a	accelerazione angolare	α
forza	F	momento della forza	τ
quantità di moto	p mv	momento angolare	L $I\omega$
energia cinetica di traslazione	$\frac{1}{2} m v^2$	energia cinetica di rotazione	$\frac{1}{2} I \omega^2$
legge fondamentale della dinamica delle traslazioni	$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ $F = ma$	legge fondamentale della dinamica delle rotazioni	$\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t}$ $\tau = I \alpha$

Applicazioni

Disco di Maxwell (Yo-Yo)

Il disco di Maxwell è essenzialmente un modello di Yo-Yo, con il filo di sostegno che si avvolge su un asse di raggio r . Le forze esterne agenti sul disco di momento d'inerzia I e massa M sono la tensione T del filo e il peso P del disco.



L'equazione del moto del centro di massa $F = M a$ permette di scrivere:

$$P - T = M a$$

La legge della dinamica delle rotazioni $\tau = I \alpha$ si può scrivere come:

$$T r = I a / R$$

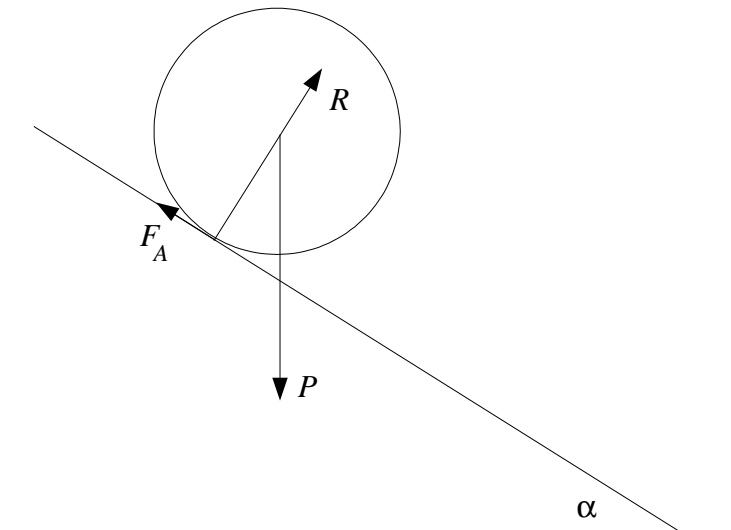
ove si è sfruttata la relazione $\alpha = a / R$.

Risolvendo le due equazioni nell'incognita a si ottiene:

$$a = \frac{Mg}{M + \frac{I}{R^2}} = \frac{g}{1 + \frac{I}{MR^2}}$$

Rotolamento su piano inclinato

Il rotolamento senza strisciamento di un corpo di forma opportuna su un piano inclinato è possibile grazie alla presenza di attrito statico nei punti di contatto con il piano. Tuttavia questa forza, almeno idealmente, non produce lavoro dissipativo perchè i punti ai quali è applicata sono istantaneamente fermi durante il moto del corpo. In altre parole si può pensare al corpo come istantaneamente rotante attorno ad un asse passante per i punti di contatto con il piano.



La figura illustra le forze agenti su un corpo in rotazione sul piano inclinato: oltre al peso P agiscono la forza d'attrito F_A e la reazione vincolare del piano R che deve bilanciare la componente normale della forza peso. Il moto del centro di massa lungo il piano è quindi determinato dall'azione di due forze: la componente parallela del peso P_{\parallel} e la forza d'attrito:

$$P_{\parallel} - F_A = Ma$$

La dinamica delle rotazioni permette di scrivere, pensando ad un asse di rotazione passante per il centro di massa:

$$\tau = F_A R = I \frac{a}{R}$$

Ricavando da quest'ultima equazione $F_A = I \frac{a}{R^2}$ e sostituendolo nella prima

$$Mg \sin \alpha - \frac{I}{R^2} a = Ma$$

si arriva all'espressione finale dell'accelerazione

$$a = \frac{Mg \sin \alpha}{M + \frac{I}{R^2}} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{MR^2}}$$

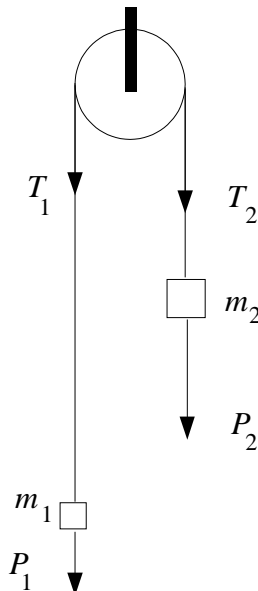
in cui appare chiaramente, rispetto al caso della traslazione pura, l'influenza della rotazione e del particolare momento d'inerzia del corpo.

L'energia cinetica totale del corpo si può esprimere, sempre tenendo conto del puro rotolamento, come:

$$E_{cin,tot} = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2} \left(M + \frac{I}{R^2} \right) v^2$$

Macchina di Atwood

Si può ora studiare l'influenza della massa di una carrucola in una macchina di Atwood. La carrucola viene posta in rotazione quando le due masse si muovono, restando il filo aderente ad essa, perchè le due tensioni T_1 e T_2 esercitate dalle masse sono in realtà diverse l'una dall'altra.



Nell'ipotesi che sia $m_1 < m_2$ le equazioni del moto dei centri di massa di m_1 e m_2 si possono scrivere come:

$$P_2 - T_2 = m_2 a \quad \text{e} \quad T_1 - P_1 = m_1 a$$

La legge dei momenti fornisce, applicata rispetto al centro della carrucola:

$$T_2 R - T_1 R = I \alpha \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{a}{R}$$

dato che i momenti della forza peso e della forza di sostegno sono nulli.
Ricavando l'accelerazione si ottiene:

$$a = \frac{(m_2 - m_1) g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}$$